DEVOIR NUMÉRO 5 VERSION B
CORRECTION

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Barèmes et exigences

Commentaires généraux / erreurs fréquentes

Correction détaillée

Exercice 1.

1. f est $\mathcal{C}^1$ comme polynôme.

2. a. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4\,(x-y) = 4x^3 - 4x + 4y$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4\,(x-y)\,(-1) = 4y^3 + 4x - 4y$$

b. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \quad &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &=& 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} 4\,(x^3 - x + y) &=& 0 \\ 4\,(y^3 + x - y) &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y &=& 0 \\ y^3 + x - y &=& 0 \end{array}\right.\end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2} \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y &=& 0 \\ y^3 + x - y &=& 0 \end{array}\right.}$$

c. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Par définition (x,y) est un point critique de f si et seulement si $\nabla(f)(x,y) = 0_{\mathbb{R}^2}$ Le système qu'il faut résoudre n'est pas un système linéaire. Nous n'allons donc pas raisonner par équivalences mais plutôt par analyse-synthèse : on cherche des conditions sur (x,y) pour que ce soit un point critique, puis on vérifiera que ces conditions sont suffisantes. Partons donc de la caractérisation

$$(x,y) \text{ est un point critique de } f \iff \left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y &=& 0 \\ y^3 + x - y &=& 0 \end{array}\right. .$$

En ajoutant ces deux lignes, on obtient $x^3 + y^3 = 0$, c'est-à-dire, $x^3 = -y^3 = (-y)^3$. Or la fonction $x \mapsto x^3$ est une bijection (elle est continue et strictement croissante) donc de $x^3 = (-y)^3$, on obtient $x = -y$. Dans la première ligne du système, remplaçons alors y par $-x$. On a

$$x^3 - 2x = 0$$

qui est une équation de degré 3 mais facile à résoudre puisqu'elle a une racine évidente 0. En effet :

$$x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

Date: 22 Mars 2025 8h30-12h30.
http://louismerlin.fr.

et on constate que $x \in \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$. Les *candidats* pour être des points critiques (ce ne sont que des candidats car on n'a pas raisonné par équivalences) sont donc les points (x, y) suivants

$$(0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Enfin, on vérifie facilement que ces trois candidats sont effectivement points critiques en vérifiant que le gradient s'annule en ces trois points.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ possède trois points critiques : } (0,0),\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).}$$

3. a. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fonction polynomiale.
Elle admet donc des dérivées partielles d'ordre 2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tout d'abord :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 4\ (3x^2 - 1)$$

Ensuite :

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y}(x, y) = 4 = \frac{\partial f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

La dernière égalité est obtenue en vertu du théorème de Schwarz puisque la fonction f est $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
Enfin :

$$\frac{\partial f}{\partial y^2}(x, y) = 4\ (3y^2 - 1)$$

b.

$$\nabla^2(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (0)^2 - 1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (0)^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2(f)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (\sqrt{2})^2 - 1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (-\sqrt{2})^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2(f)(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 4\ (3\ (\sqrt{2})^2 - 1) & 4 \\ 4 & 4\ (3\ (-\sqrt{2})^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

c.

$$\begin{aligned} \det\left(\nabla^2(f)(0,0) - \lambda\ I\right) &= \det\left(\begin{pmatrix} -4-\lambda & 4 \\ 4 & -4-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= (-4-\lambda)^2 - 4^2 \\ &= (4+\lambda)^2 - 4^2 \\ &= (4+\lambda-4)\ (4+\lambda+4)\ =\ \lambda\ (\lambda+8) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla^2(f)(0,0) \text{ admet pour valeurs propres } 0 \text{ et } -8.}$$

$$\begin{aligned} \det\left(\nabla^2(f)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) - \lambda\ I\right) &= \det\left(\begin{pmatrix} 20-\lambda & 4 \\ 4 & 20-\lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= (20-\lambda)^2 - 4^2 \\ &= (20-\lambda-4)\ (20-\lambda+4)\ =\ (16-\lambda)\ (24-\lambda) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \nabla^2(f)(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et } \nabla^2(f)(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ admettent pour valeurs propres 16 et 24.}}$$

es deux matrices admettent deux valeurs propres strictement positives. On en déduit que f admet un minimum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
Enfin :

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^4 + (-\sqrt{2})^4 - 2\ (\sqrt{2} - (-\sqrt{2}))^2 \\ &= 4 + 4 - 2\ (2\ \sqrt{2})^2 \\ &= 8 - 2 \times 4 \times 2 \\ &= 8 - 16\ =\ -8 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ce minimum local a pour valeur } f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8 = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}).}$$

d. Tout d'abord :

$$f(x,x) = x^4 + x^4 - 2\ (x-x)^2 = 2\ x^4 \geqslant 0$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} f(x,-x) &= x^4 + (-x)^4 - 2\ (x-(-x))^2 \\ &= 2x^4 - 2\ (2\ x)^2 \\ &= 2x^4 - 8x^2 \\ &= 2x^2\ (x^2-4) = 2x^2\ (x-2)\ (x+2) \end{aligned}$$

Comme $x^2 \geqslant 0$, la quantité $f(x,-x)$ est du signe de de $(x-2)\ (x+2)$. Ainsi, $f(x,-x) < 0$ si $x \in]-2,2[\setminus\{0\}$, et $f(x,-x) \geqslant 0$ sinon. Enfin, $f(0,0) = 0$.
On déduit de ce qui précède que pour tout x au voisinage de 0 (exclu), on a :

$$f(x,-x) < f(0,0) < f(x,x)$$

On en conclut qu'au point $(0,0)$, la fonction f n'admet ni un minimum local, ni un maximum local. Il n'y a pas d'extremum au point $(0,0)$.

4. a. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} & f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2 \\ = \ & f(x,y) - (x^4 - 4x^2 + 4) - (y^4 - 4y^2 + 4) - 2\ (x^2 + 2xy + y^2) \\ = \ & (x^4 + y^4 - 2(x-y)^2) - x^4 - y^4 + 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8 \\ = \ & -2x^2 + 4xy - 2y^2 + 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8 \\ = \ & -8 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) - (x^2-2)^2 - (y^2-2)^2 - 2(x+y)^2 = -8.}$$

b. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -8 + \Big((x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2\Big) \\ &\geq -8 \end{aligned}$$

car on ajoute à -8 une somme de carrés.

c. On rappelle que $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$. Ainsi :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \leqslant f(x,y)$$

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet aux points } (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ et } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ un minimum global.}}$$

5. a.

```
    def f(x,y):
      return x**4 + y**4 - 2 * (x - y)**2
```

b.
- D'après l'étude précédente, la fonction f possède un minimum global réalisé en les deux points $((\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}))$.
- On peut écarter la deuxième nappe qui représente une fonction n'admettant un minimum global qu'en un point.
- On peut écarter la troisième nappe qui représente une fonction n'admettant pas de minimum global (elle admet par contre un point selle).
- Seule la première nappe représente une fonction admettant un minimum global réalisé en deux points. C'est donc la représentation de la fonction f considéré.

$$\boxed{\text{Le script précédent renvoie la première nappe.}}$$

Exercice 2. C'est l'exercice 2 de l'EDHEC 2020.

Exercice 3.

1. **a.** La formule qui décrit F_n à partir de l'échantillon ne dépend pas de p, c'est donc un estimateur de p.

b. Par linéarité de l'espérance, on a déjà

$$\mathbb{E}(F_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k).$$

Les variables aléatoires X_k sont des Bernoulli de paramètre p et leur espérance vaut donc p. Ainsi

$$E(F_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p = \frac{np}{n} = p.$$

c. Par *indépendance* des variables X_i, on a

$$\mathbb{V}(F_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k).$$

On connaît les variances des X_k puisque ce sont des Bernoulli : on a $\mathbb{V}(X_k) = p(1-p)$. Ainsi

$$\mathbb{V}(F_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} p(1-p) = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}.$$

d. Soit $\varepsilon > 0$. On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à F_n :

$$\mathbb{P}\left([|F_n - \mathbb{E}(F_n)| \geqslant \varepsilon]\right) \leqslant \frac{\mathbb{V}(F_n)}{\varepsilon^2}.$$

Puisqu'on a calculé l'espérance et la variance de F_n, on obtient en fait :

$$\mathbb{P}\left([|F_n - p| \geqslant \varepsilon]\right) \leqslant \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, $\frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$ tend vers 0 et le théorème des gendarmes permet de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left([|F_n - \mathbb{E}(F_n)| \geqslant \varepsilon]\right) = 0.$$

C'est la définition d'estimateur convergent.

2. **a.** C'est une question de cours, le théorème limite centrale s'applique et montre que cette suite de variables aléatoires converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

b. C'est très classique, on pose $\varphi(p) = p(1-p)$. La fonction φ est dérivable et $\varphi'(p) = 1-2p$. D'où on déduit que φ est croissante entre 0 et $\frac{1}{2}$ et décroissante entre $\frac{1}{2}$ et 1. Elle atteint donc son maximum en $\frac{1}{2}$ et $\varphi(1/2) = 1/4$. Ainsi $p(1-p) \leqslant 1/4$.

c. Le théorème limite centrale appliqué comme à la question **2.a** montre donc que

$$\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\left[-t_\alpha \leqslant \sqrt{n}\frac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant t_\alpha\right]\right) = \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \left(1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1-\alpha.$$

On montre ensuite

$$\begin{aligned}\left[-t_\alpha \leqslant \sqrt{n}\frac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)}} \leqslant t_\alpha\right] &\iff \left[-t_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant F_n - p \leqslant t_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]\\ &\iff \left[F_n - t_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F_n + t_\alpha\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right].\end{aligned}$$

On sait depuis la question précédente que $\sqrt{p(1-p)} \leqslant \frac{1}{2}$. Ainsi, on a l'inclusion des deux intervalles

$$\left[F_n - t_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, F_n + t_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] \subset \left[F_n - \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}, F_n + \frac{t_\alpha}{2\sqrt{n}}\right] = [u_n, v_n],$$

et on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([p \in [u_n, v_n]]\right) \geqslant 1-\alpha.$$

Ceci signifie que $[u_n, v_n]$ est un intervalle de confiance asymptotique au niveau de confiance $1-\alpha$ pour p.

3. Dans le cas considéré, on a donc $f_n = \frac{400}{10000} = 0,04$, $\sqrt{n} = 100$ et $t_\alpha = 2,7$ environ (j'ai oublié de mettre la table de la loi normale en annexe), ce qui nous donne une intervalle de confiance qui ne contient que des valeurs strictement inférieure à $0,05$. Le directeur choisit d'acheter la machine.

Exercice 4.

1. La définition de T_n dépend de θ, ce qui est interdit pour estimer θ. La variable T_n ne peut donc pas être un estimateur de θ.

2. On a, comme il est très classique,

$$\begin{aligned}
F_{U_n}(x) &= \mathbb{P}\left([U_n \leqslant x]\right) \\
&= \mathbb{P}\left([\max(X_1, \cdots, X_n) \leqslant x]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leqslant x]\right]\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left([X_k \leqslant x]\right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x) \\
&= F_{X_1}(x)^n \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \left(\frac{x}{\theta}\right)^n & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant \theta \\ 1 & \text{si} \quad x > \theta \end{cases}
\end{aligned}$$

On s'intéresse alors à la variable T_n et à sa fonction de répartition :

$$\begin{aligned}
F_{T_n}(x) &= \mathbb{P}\left([T_n \leqslant x]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[n\left(1 - \frac{U_n}{\theta}\right) \leqslant x\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[\left(1 - \frac{U_n}{\theta}\right) \leqslant \frac{x}{n}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[-\frac{U_n}{\theta} \leqslant \frac{x}{n} - 1\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[-U_n \leqslant \theta\left(\frac{x}{n} - 1\right)\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[U_n \geqslant -\theta\left(\frac{x}{n} - 1\right)\right]\right) \\
&= 1 - F_{U_n}\left(-\theta\left(\frac{x}{n} - 1\right)\right)
\end{aligned}$$

Pour finir le calcul, on distingue 3 cas

- Si $-\theta\left(\frac{x}{n}-1\right)<0$, alors $1-F_{U_n}\left(-\theta\left(\frac{x}{n}-1\right)\right)=1-0=1$. Or
$$-\theta\left(\frac{x}{n}-1\right)<0 \Longleftrightarrow \frac{x}{n}-1>0 \Longleftrightarrow x>n.$$
- Si $-\theta\left(\frac{x}{n}-1\right)\in[0,\theta]$, alors $1-F_{U_n}(x)=1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$. Or on montre facilement comme précédemment que
$$0\leqslant -\theta\left(\frac{x}{n}-1\right)\leqslant\theta \Longleftrightarrow 0\leqslant x\leqslant n.$$
- Enfin si $-\theta\left(\frac{x}{n}-1\right)>\theta$, alors $x<0$ et $1-F_{U_n}(x)=0$

En résumé, nous avons montré que
$$F_{T_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0\leqslant x\leqslant n\\ 1 & \text{si } x>n\end{cases}$$

3. Encore une question très classique (mais un peu délicate). On distingue cette fois seulement deux cas.
- Si $x<0$, alors $F_{T_n}(x)=0$ et converge donc vers 0 lorsque $n\to+\infty$.
- Si $x\geqslant 0$, alors il existe un rang n tel que $x\leqslant n$ à partir de ce rang. On a donc, pour n assez grand, $F_{T_n}(x)=\left(1-\frac{x}{n}\right)^n=\exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)$. Lorsque n tend vers $+\infty$, on $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{x}{n}$, de sorte que
$$n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-n\frac{x}{n}=-x.$$
On conclut alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}F_{T_n}(x)=1-e^{-x}$.

On reconnaît à la limite la fonction de répartition d'une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre 1. Cela signifie exactement que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

4. On a
$$\begin{aligned}U_n\leqslant\theta\leqslant V_n &\Longleftrightarrow \frac{1}{V_n}\leqslant\frac{1}{\theta}\leqslant\frac{1}{U_n}\\ &\Longleftrightarrow \frac{U_n}{V_n}\leqslant\frac{U_n}{\theta}\leqslant 1\\ &\Longleftrightarrow -1\leqslant-\frac{U_n}{\theta}\leqslant-\frac{U_n}{V_n}\\ &\Longleftrightarrow 0\leqslant 1-\frac{U_n}{\theta}\leqslant 1-\frac{U_n}{V_n}\\ &\Longleftrightarrow 0\leqslant T_n\leqslant n\left(1-\frac{U_n}{V_n}\right)\end{aligned}$$

5. Posons $V_n=\frac{U_n}{1+\frac{\ln(\alpha)}{n}}$ comme indiqué. Alors
$$n\left(1-\frac{U_n}{V_n}\right)=n\left(1-\frac{U_n}{\frac{U_n}{1+\frac{\ln(\alpha)}{n}}}\right)=-\ln(\alpha).$$
On note alors Φ la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. En se souvenant que T_n converge en loi vers la loi exponentielle on a,
$$\mathbb{P}\left([U_n\leqslant\theta\leqslant V_n]\right)=\mathbb{P}\left([0\leqslant T_n\leqslant-\ln(\alpha)]\right)\to\Phi(-\ln(\alpha))-\Phi(0)=1-\alpha.$$
On a donc bien fabriqué l'intervalle de confiance cherché.

6. **a.** C'est une question de cours que l'on a déjà traité en détails, la variable θX suit une loi uniforme $\mathcal{U}([0,\theta])$. Cette remarque sert à dire en particulier que la ligne `print(theta*rd.rand())` du programme `Python` simule et affiche une réalisation d'une loi uniforme $\mathcal{U}([0,\theta])$.

b. Dans le cas du programme, on obtient $U_n = 1,0237293$ (la plus grande valeur observé) et $V_n = \frac{U_n}{1-\frac{3}{n}} = \frac{1,0237293}{1-\frac{3}{10}} = 1.4285$ L'intervalle de confiance pour θ est donc $[1,0237; 1.4285]$.

c. On cherche donc n tel que $\frac{1}{1-\frac{3}{n}} = 1.01$. On doit donc avoir $1 - \frac{3}{n} = \frac{1}{1.01} = 0.99$. Puis $\frac{3}{n} = 0.01$ et enfin $n = 300$